8. Используя формулу Хартли и электронные таблицы, определите количество информации в сообщениях о равновероятных событиях:
   а) на шестигранном игральном кубике выпала цифра 3;
   б) в следующем году ремонт в школе начнется в феврале;
   в) я приобрел абонемент в бассейн на среду;
   г) из 30 учеников класса дежурить в школьной столовой назначили Дениса Скворцова.

9. Используя закон аддитивности количества информации, решите задачу о билете в кинотеатр со следующим дополнительным условием: в кинотеатре 4 зала. В билете указан номер зала, номер ряда и номер места. Какое количество информации заключено в билете?

§ 5
Представление чисел в компьютере

Главные правила представления данных в компьютере

Если бы мы могли заглянуть в содержание компьютерной памяти, то увидели бы там примерно то, что условно изображено на рис. 1.5.

1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1

Рис. 1.5. Образ компьютерной памяти

Рисунок 1.5 отражает известное вам еще из курса информатики основной школы правило представления данных, которое назовем **правилом № 1:** *данные* (*и программы*) *в памяти компьютера хранятся в двоичном виде*, т. е. в виде цепочек единиц и нулей.

Современный компьютер может хранить и обрабатывать данные, представляющие информацию четырех видов: числовую, текстовую, графическую, звуковую. Двоичный код, изображенный на рис. 1.5, может относиться к любому виду данных.

Правило № 2: *представление данных в компьютере дискретно.*

Правило № 3: *множество представимых в памяти компьютера величин ограничено и конечно.*

Представление чисел

Сначала поясним на образном примере, что такое дискретность.

Дискретное множество состоит из отделенных друг от друга элементов. Например, песок дискретен, поскольку он состоит из отдельных песчинок. А вода или масло непрерывны (в рамках наших ощущений, поскольку отдельные молекулы мы всё равно ощутить не можем). Этот пример нужен нам только для аналогии. Здесь мы не станем углубляться в изучение материального мира, а вернемся к предмету изучения информатики — информации.

Самым традиционным видом данных, с которым работают компьютеры, являются числа. ЭВМ первого поколения умели решать только математические задачи. Люди начали работать с числами еще с первобытных времен. Первоначально человек оперировал лишь целыми положительными (натуральными) числами: 1, 2, 3, 4, ... Очевидно, что *натуральный ряд — это дискретное множество чисел.*

В математике ряд *натуральных чисел бесконечен и не ограничен.* С появлением в математике понятия отрицательного числа (Р. Декарт, XVII век в Европе; в Индии значительно раньше) оказалось, что множество целых чисел не ограничено как «справа», так и «слева». Покажем это на числовой оси (рис. 1.6), символы ∞ обозначают бесконечность.

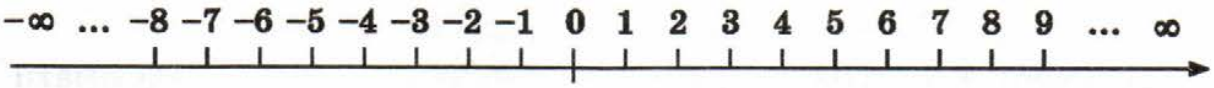

Рис. 1.6. Математическое множество целых чисел на числовой оси

Из сказанного следует вывод: *множество целых чисел в математике дискретно и не ограничено*. Отметим еще один факт: разность соседних чисел натурального ряда (данного и предыдущего) всегда равна единице. Эту величину назовем *шагом числовой последовательности*.

Любое вычислительное устройство (компьютер, калькулятор) может работать только с *ограниченным* множеством целых чисел. Возьмите в руки калькулятор, на индикаторном табло которого помещается 10 знаков. Самое большое положительное число, которое на него поместится:

	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Самое большое по абсолютной величине (модулю) отрицательное число:

–	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Аналогично дело обстоит и в компьютере.

Целые числа в компьютере

Правило № 4: *в памяти компьютера числа хранятся в двоичной системе счисления**. С двоичной системой счисления вы знакомы из курса информатики 7–9 классов. Например, если под целое число выделяется ячейка памяти размером в 16 битов, то самое большое целое положительное число будет таким:

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

В десятичной системе счисления оно равно:

$$2^{15} - 1 = 32\,767.$$

* Конечно, и «внутри калькулятора» числа представляются в двоичном виде. Однако мы в это вдаваться не будем, рассмотрев лишь внешнее представление. Пример с калькулятором нам нужен был только для иллюстрации проблемы ограниченности.

Здесь первый бит играет роль знака числа. Ноль — признак положительного числа. Самое большое по модулю отрицательное число равно –32 768. Напомним (это было в курсе информатики основной школы), как получить его внутреннее представление:

1) перевести число 32 768 в двоичную систему счисления; это легко, поскольку $32\,768 = 2^{15}$:

1000000000000000;

2) инвертировать этот двоичный код, т. е. заменить нули на единицы, а единицы — на нули:

0111111111111111;

3) прибавить единицу к этому двоичному числу (складывать надо по правилам двоичной арифметики), в результате получим:

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Единица в первом бите обозначает знак «минус». Не нужно думать, что полученный код — это «минус ноль». Этот код представляет число –32 768. Таковы правила машинного представления целых чисел. Данное представление называется **дополнительным кодом**.

Если под целое число в памяти компьютера отводится N битов, то диапазон значений целых чисел:

$$[-2^{N-1}, 2^{N-1} - 1],$$

то есть ограниченность целого числа в компьютере возникает из-за ограничений на размер ячейки памяти. Отсюда же следует и конечность множества целых чисел.

Мы рассмотрели **формат представления целых чисел со знаком**, т. е. положительных и отрицательных. Бывает, что нужно работать только с положительными целыми числами. В таком случае используется **формат представления целых чисел без знака**. В этом формате самое маленькое число — ноль (все биты — нули), а самое большое число для 16-разрядной ячейки:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

В десятичной системе это $2^{16} - 1 = 65\,535$, примерно в два раза больше по модулю, чем в представлении со знаком.

Из всего сказанного делаем вывод: *целые числа в памяти компьютера — это дискретное, ограниченное и конечное множество.*

Границы множества целых чисел зависят от размера выделяемой ячейки памяти под целое число, а также от формата: со знаком или без знака. Шаг в компьютерном представлении последовательности целых чисел, как и в математическом, остается равным единице.

Рисунок 1.7 отражает то обстоятельство, что при переходе от математического представления множества целых чисел к представлению, используемому в информатике (компьютере), происходит переход к ограниченности и конечности.

Рис. 1.7. Представление о множестве целых чисел в математике и в информатике

Вещественные числа в компьютере

Понятие вещественного (действительного) числа в математику ввел Исаак Ньютон в XVIII веке. В математике множество вещественных чисел непрерывно, бесконечно и не ограничено. Оно включает в себя множество целых чисел и еще бесконечное множество нецелых чисел. Между двумя любыми точками на числовой оси лежит бесконечное множество вещественных чисел, что и означает непрерывность множества.

Как мы говорили выше, числа в компьютере (в том числе и вещественные) представлены в двоичной системе счисления. Покажем, что множество вещественных чисел в компьютере дис-

кретно, ограничено и конечно. Нетрудно догадаться, что это, так же как и в случае целых чисел, вытекает из ограничения размера ячейки памяти.

Снова для примера возьмем калькулятор с десятиразрядным индикаторным табло. Экспериментально докажем дискретность представления вещественных чисел. Выполним на калькуляторе деление 1 на 3. Из математики вам известно, что 1/3 — это рациональная дробь, представление которой в виде десятичной дроби содержит бесконечное количество цифр: 0,3333333333... (3 в периоде). На табло калькулятора вы увидите:

	0.	3	3	3	3	3	3	3	3

Первый разряд зарезервирован под знак числа. После запятой сохраняется 8 цифр, а остальные не вмещаются *в разрядную сетку* (так это обычно называют). Значит, это не точное значение, равное 1/3, а его «урезанное» значение.

Следующее по величине число, которое помещается в разрядную сетку:

	0.	3	3	3	3	3	3	3	4

Оно больше предыдущего на 0,00000001. Это шаг числовой последовательности. Следовательно, два рассмотренных числа разделены между собой конечным отрезком. Очевидно, что предыдущее число такое:

	0.	3	3	3	3	3	3	3	2

Оно тоже отделено от своего «соседа справа» по числовой оси шагом 0,00000001. Отсюда делаем вывод: *множество вещественных чисел, представимых в калькуляторе, дискретно, поскольку числа отделены друг от друга конечными отрезками.*

А теперь выясним вот что: будет ли шаг в последовательности вещественных чисел на калькуляторе постоянной величиной (как у целых чисел)?

Вычислим выражение 100000/3. Получим:

	3	3	3	3	3.	3	3	3	3

Это число в 100 000 раз больше предыдущего и, очевидно, тоже приближенное. Легко понять, что следующее вещественное число, которое можно получить на табло калькулятора, будет больше данного на 0,0001. Шаг стал гораздо больше.

Отсюда приходим к выводу: *множество вещественных чисел, представимых в калькуляторе, дискретно с переменной величиной шага между соседними числами.*

Если отметить на числовой оси точные значения вещественных чисел, которые представимы в калькуляторе, то эти точки будут расположены вдоль оси неравномерно. Ближе к нулю — чаще, дальше от нуля — реже (рис. 1.8).

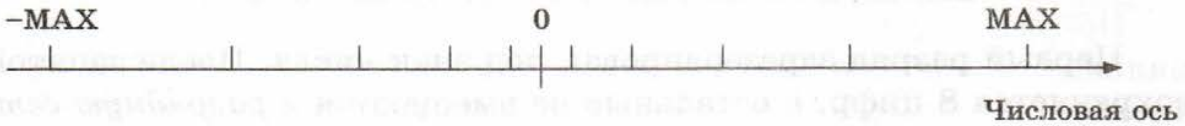

Рис. 1.8. Условное представление взаимного расположения множества вещественных чисел, представимых в компьютере

Все выводы, которые мы делаем на примере калькулятора, полностью переносятся на компьютер с переходом к двоичной системе счисления и с учетом размера ячейки компьютера, отводимой под вещественные числа. Неравномерное расположение вещественных чисел, представимых в компьютере, также имеет место.

Ответим на вопрос: ограничено ли множество вещественных чисел в памяти компьютера? Если продолжать эксперименты с калькулятором, то ответ на этот вопрос будет таким: да, множество вещественных чисел в калькуляторе ограничено. Причиной тому служит все та же ограниченность разрядной сетки. Отсюда же следует и конечность множества.

Самое большое число у разных калькуляторов может оказаться разным. У самого простого это будет то же число, что мы получали раньше: 999999999. Если прибавить к нему единицу, то калькулятор выдаст сообщение об ошибке. А на другом, более «умном» и дорогом, калькуляторе прибавление единицы приведет к такому результату:

					1	e	+	0	9

Данную запись на табло надо понимать так: $1 \cdot 10^9$.

Такой формат записи числа называется **форматом с плавающей запятой**, в отличие от всех предыдущих примеров, где рассматривалось представление чисел в **формате с фиксированной запятой**.

Число, стоящее перед буквой «е», называется **мантиссой**, а стоящее после — **порядком**. «Умный» калькулятор перешел к представлению чисел в формате с плавающей запятой после того, как под формат с фиксированной запятой не стало хватать места на табло.

В компьютере то же самое: числа могут представляться как в формате с фиксированной запятой (обычно это целые числа), так и в формате с плавающей запятой.

Но и для формата с плавающей запятой тоже есть максимальное число. В нашем «подопытном» калькуляторе это число:

	9	9	9	9	9	е	+	9	9

То есть $99999 \cdot 10^{99}$. Самое большое по модулю отрицательное значение $-99999 \cdot 10^{99}$. Данные числа являются целыми, но именно они ограничивают представление любых чисел (целых и вещественных) в калькуляторе.

В компьютере всё организовано аналогично, но предельные значения еще больше. Это зависит от разрядности ячейки памяти, выделяемой под число, и от того, сколько разрядов выделяется под порядок и под мантиссу.

Рассмотрим пример: пусть под всё число в компьютере выделяется 8 байтов — 64 бита, из них под порядок — 2 байта, под мантиссу — 6 байтов. Тогда диапазон вещественных чисел, в переводе в десятичную систему счисления, оказывается следующим:

$$\pm(5 \cdot 10^{-324} - 1{,}7 \cdot 10^{308}).$$

Завершая тему, посмотрим на рис. 1.9. Смысл, заложенный в нем, такой: непрерывное, бесконечное и не ограниченное множество вещественных чисел, которое рассматривает математика, при его представлении в компьютере обращается в дискретное, конечное и ограниченное множество.

Рис. 1.9. Представление о множестве вещественных чисел в математике и в информатике

Система основных понятий

Представление чисел			
Целые числа		Вещественные числа	
В математике: - десятичное представление; - множество: дискретно, бесконечно, не ограничено	*В компьютере (информатике)*: - двоичное представление; - множество: дискретно, конечно, ограничено	*В математике*: - десятичное представление; - множество: непрерывно, бесконечно, не ограничено	*В компьютере (информатике)*: - двоичное представление; - множество: дискретно, конечно, ограничено
Представление целых чисел в компьютере		Представление вещественных чисел в компьютере	
Со знаком (положительные и отрицательные)	Без знака (положительные)	$M \times 2^P$ M — двоичная мантисса, P — двоичный целый порядок	
Диапазон: $[-2^{N-1}, 2^{N-1}-1]$	Диапазон: $[0, 2^N]$	Диапазон ограничен максимальными значениями M и P	
Формат с фиксированной запятой		Формат с плавающей запятой	